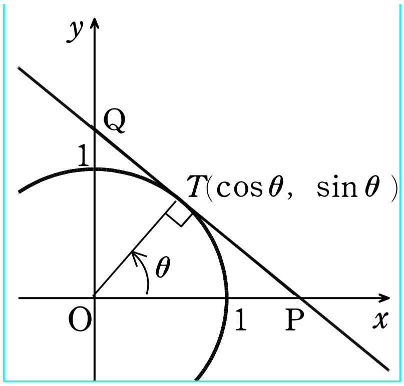
図形の問題を探究する

1 月 15 日・16 日の「**2022 年度大学入試共通テスト**」が終わり，高校 3 年受験生は，私立大学一般入試，そして 2 月 25 日より始まる「**国公立大学 2 次入試**」に向けて，猛勉強を始めていることでしょう。前回は，三角形に関する入試問題を取り上げましたが，今回も平面図形で円に関する入試問題をめぐって，様々な解法を考えてみたいと思います。

問題　P は x 軸上の点で x 座標が正であり，Q は y 軸上の点で y 座標が正である。直線 PQは原点 O を中心とする半径 1 の円に接している。また，a，b は正の定数とする。P，Q を動かすとき，$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2$ の最小値を a，b で表せ。（2005年，東京工業大学）

解答　直線 PQ と 原点中心,半径 1 の円 との接点を 図のように $T(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおく。題意より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ …①



$$OP=\frac{1}{\cos\theta},\quad OQ=\frac{1}{\sin\theta}\quad \cdots\cdots ②$$

$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2=\dfrac{a}{\cos^2\theta}+\dfrac{b}{\sin^2\theta}=f(\theta)$ とおく。

$$f'(\theta)=-\frac{2a\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{\cos^4\theta}-\frac{2b\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin^4\theta}$$

$=\dfrac{2a\sin\theta}{\cos^3\theta}-\dfrac{2b\cos\theta}{\sin^3\theta}=\dfrac{2(a\sin^4\theta-b\cos^4\theta)}{\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta}=\dfrac{2a\cos^4\theta\left(\tan^4\theta-\dfrac{b}{a}\right)}{\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta}=0$ とすると，

①より，$\tan\theta>0$，また $\dfrac{b}{a}>0$ だから，$\tan\theta=\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$，ここで $\tan\alpha=\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$ とおくと，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

増減表より，$\theta=\alpha$ のとき，$f(\theta)$ は極小かつ最小となる。

このとき，$\tan^2\theta=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ だから，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$，

また，$\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=1+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$

求める最小値は，$f(\alpha)=a\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+b\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ 答

（②より，$OP=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}$，$OQ=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}$ のとき，最小となる。）

山脇の超数学講座 No. 34

相加平均・相乗平均の関係を効果的に利用する

左記の解答は，単位円であるところから三角関数を媒介変数として使い，微分法によって解決している。このとき，最小値，および最小値をとる OP，OQ の値を見ると，a と b が「**対称的**」であることに気づくだろう。しかも，変数も定数も正の値をとる。こういう問題で威力を発揮する解法が，「**相加平均・相乗平均の関係を利用する**」解法である。

> 「相加平均･相乗平均の関係」とは，$a>0$，$b>0$ のとき，任意の a，b に対して，
> $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つことをいい，等号が成り立つのは $a=b$ のときのみである。

別解 1　$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2=\dfrac{a}{\cos^2\theta}+\dfrac{b}{\sin^2\theta}=f(\theta)$　までは，解答と同じ。

ここで，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　であることを利用して，

$$f(\theta)=\left(\frac{a}{\cos^2\theta}+\frac{b}{\sin^2\theta}\right)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a+b+\frac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{b\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$\dfrac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta}>0$，$\dfrac{b\cos^2\theta}{\sin^2\theta}>0$ だから，相加平均・相乗平均の大小関係により，

$$f(\theta)\geqq a+b+2\sqrt{\frac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{b\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}=a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{b\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ のとき，つまり，$\tan^4\theta=\dfrac{b}{a}$ のとき。

したがって，$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2$ の最小値は，$\underline{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$ 答　（以下は，解答と同じ）

別解 2　P$(p,\ 0)$，Q$(0,\ q)$ $(p>1,\ q>1)$ とすると，直線 PQ の方程式は $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$，

$\Leftrightarrow qx+py=pq$，円 $x^2+y^2=1$ に接するので，$\dfrac{|q\cdot0+p\cdot0-pq|}{\sqrt{q^2+p^2}}=1 \Leftrightarrow |pq|=\sqrt{p^2+q^2}$

$\Leftrightarrow p^2q^2=p^2+q^2$，　$p>1$ より $p^2-1>0$ であるから　$q^2=\dfrac{p^2}{p^2-1}=1+\dfrac{1}{p^2-1}$

$$a\mathrm{OP}^2+b\mathrm{OQ}^2=ap^2+bq^2=ap^2+b\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right)=a+b+a(p^2-1)+\frac{b}{p^2-1}$$

$p^2-1>0$，$a>0$，$b>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により，

$$a+b+a(p^2-1)+\frac{b}{p^2-1}\geqq a+b+2\sqrt{a(p^2-1)\cdot\frac{b}{p^2-1}}=a+b+2\sqrt{ab}$$

等号は $a(p^2-1)=\dfrac{b}{p^2-1} \Leftrightarrow p=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}$，$q=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}$ のとき成り立つ。

（以下は，解答と同じ）